

Calcul de dérivées

$$1. f(x) = \frac{x^3-3x}{3(x^2-2x)}$$

Observons la formule : est-elle sous la forme la plus simple ?

On voit qu'elle n'est pas entièrement factorisée : on peut mettre x en facteur au numérateur et au dénominateur.

On peut donc simplifier par x .

Factorisons cette fonction :

$$(1) \quad f(x) = \frac{x(x^2-3)}{3x(x-2)}$$

Cette fonction n'est pas définie pour $x = 0$ et $x = 2$ ($D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$).

Maintenant que l'on a interdit $x = 0$, on peut simplifier par x :

$$(2) \quad f(x) = \frac{x^2-3}{3(x-2)}$$

Calcul de la dérivée :

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u}{v}$$

$$(4) \quad u = x^2 - 3 \quad ; \quad u' = 2x$$

$$(5) \quad v = x - 2 \quad ; \quad v' = 1$$

$$(6) \quad f'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(7) \quad f'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{2x(x-2) - (x^2-3)}{(x-2)^2}$$

$$(8) \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3}{3(x-2)^2}$$

$$(9) \quad f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{3(x-2)^2}$$

Pour étudier le signe de cette dérivée, il faudrait la factoriser.

on remarque que $x_1 = 1$ est une racine : $1 - 4 + 3 = 0$

Sachant qu'une équation du second degré est sous la forme $x^2 - Sx + P = 0$,

ici avec $S = x_1 + x_2 = 4$ et $P = x_1x_2 = 3$.

On en déduit l'autre racine par $x_2 = P/x_1 = 3$.

D'où la factorisation :

$$(10) \quad f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{3(x-2)^2}$$

Remarque : en $x = 0$, la fonction $f(x)$ n'est pas définie puisqu'elle est sous la forme $0/0$. Mais on peut la définir par continuité en calculant sa limite pour $x = 0$: Il suffit de simplifier par x et l'indétermination disparaît. On remplace alors x par 0 et on trouve $f(0) = 1/2$.

$$2. f(x) = \frac{8\sqrt{x}-x}{x+\sqrt{x}}$$

Observons la formule : est-elle sous la forme la plus simple ?

On voit qu'elle n'est pas entièrement factorisée : on peut mettre $\sqrt{x}$ en facteur au numérateur et au dénominateur.

On peut donc simplifier par $\sqrt{x}$.

Factorisons cette fonction :

$$(11) \quad f(x) = \frac{8\sqrt{x} - (\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}}$$

$$(12) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}(8 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$$

Cette fonction n'est pas définie pour $x < 0$ à cause de $\sqrt{x}$, ni pour $x = 0$ à cause de la division par $\sqrt{x}$ ($D_f = R^{+*}$).

Maintenant que l'on a interdit $x = 0$, on peut simplifier par $\sqrt{x}$:

$$(13) \quad f(x) = \frac{8 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{u}{v}$$

avec : $u = 8 - \sqrt{x}$ et $v = \sqrt{x} + 1$. Calcul des dérivées de u et v : Dérivée de $\sqrt{x}$:

$$(14) \quad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = (1/2)x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

D'où :

$$(15) \quad u' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(16) \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(17) \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(18) \quad f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1) - (8 - \sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$

On peut mettre $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ en facteur au numérateur :

$$(19) \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(-(\sqrt{x} + 1) - (8 - \sqrt{x}))}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$(20) \quad f'(x) = \frac{-(\sqrt{x} + 1) - (8 - \sqrt{x})}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$(21) \quad f'(x) = \frac{-\sqrt{x} - 1 - 8 + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$(22) \quad f'(x) = \frac{-9}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$$

Cette dérivée est toujours négative (sur le domaine de définition).

$$3. f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

Observons la formule : est-elle sous la forme la plus simple? Oui

Pas tout à fait : on peut factoriser $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Remarque : la fonction n'est pas définie pour $x = \pm 1$.

$$(23) \quad f(x) = \frac{2x}{x^2-1} = \frac{u}{v}$$

$$(24) \quad u = 2x$$

$$(25) \quad v = x^2 - 1$$

$$(26) \quad u' = 2$$

$$(27) \quad v' = 2x$$

$$(28) \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(29) \quad f'(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$(30) \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$(31) \quad f'(x) = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$(32) \quad f'(x) = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

Remarque : cette dérivée est toujours négative (sur le domaine de définition).