Asymptotes d'une fonction $y=f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$

asymptote verticale $x=a$ si $v(a)=0$ et $u(a)\neq 0$

asymptote oblique $y=ax+b$ si $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-ax=b$

Rechercher les asymptotes des fonctions suivantes : Correction

$f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ f a une valeur interdite : 3 pour laquelle elle devient infinie

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\dfrac{1}{0}=\infty$ f a une asymptote verticale $x=3$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{3}{x}}=\dfrac{0}{1-0}=0$ f a une asymptote horizontale $y=0$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ f a 2 valeurs interdites : $\{-1,1\}$ pour lesquelles elle devient infinie

$\lim\limits_{x\to\pm 1}f(x)=\dfrac{1}{0}=\infty$ f a pour asymptotes verticales $x=-1$ et $x=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{0}{1-0}=0$ f a une asymptote horizontale $y=0$

$f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$ f a une valeur interdite : 1 pour laquelle elle devient infinie

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{0}=\infty$ f a une asymptote verticale $x=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{3-0}{1-0}=3$ f a une asymptote horizontale $y=3$

$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ f a 2 valeurs interdites : $\{-1,1\}$ pour lesquelles elle devient infinie

$\lim\limits_{x\to\pm 1}f(x)=\dfrac{1}{0}=\infty$ f a pour asymptotes verticales $x=-1$ et $x=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{1-0}=1=a$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-ax=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x(x^2-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{0}{1-0}=0=b$

f a une asymptote oblique $y=x$

$f(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x-1}$ f a une valeur interdite : $x=1$ pour laquelle elle devient infinie

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{9}{0}=\infty$ f a une asymptote verticale $x=1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3x+4}{x^2-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2+0+0}{1-0}=2=a$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3x+4-2x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+4+2x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{5+0}{1-0}=5=b$$

f a une asymptote oblique $y=2x+5$